DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: non autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Les quatre parties du sujet ont été classées par ordre alphabétique sans présumer de leur difficulté ni de leur importance dans le barème final.

Afin de faciliter le travail du correcteur:

- On indiquera la numérotation des questions
- On passera une ligne entre chaque question
- On $\boxed{\textit{encadrera}}$ les réponses en rouge ou en vert

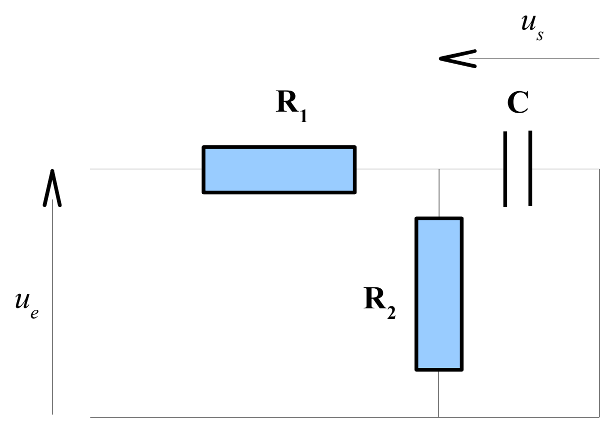
On justifiera toutes les réponses.

Une réponse littérale doit bien évidemment s'écrire en fonction des données connues se trouvant dans l'énoncé

Électrocinétique

I. Première partie

On envisage le montage suivant (voir figure):



A. Tension échelon en entrée

La tension d'entrée est un échelon de tension de grandeur E en $t=0$, le condensateur étant initialement déchargé.

1. Établir dans le cas général l'équation différentielle donnant $u_s(t)$ en fonction de $u_e(t)$.

2. Échelon de tension:

- Résoudre $u_s(t)$ dans le cas d'un échelon de tension en entrée.
- Calculer le temps de relaxation τ et la tension finale aux bornes du condensateur $u_{s,lim}$ avec $E=10{,}0\,V$, $R_1=9{,}0\,k\Omega$, $R_2=1{,}00\,k\Omega$, $C=1{,}00\,\mu F$.

B. Tension sinusoïdale en entrée

La tension d'entrée est sinusoïdale de pulsation ω .

3. Prévoir qualitativement la nature du filtre.

4. Fonction de transfert:

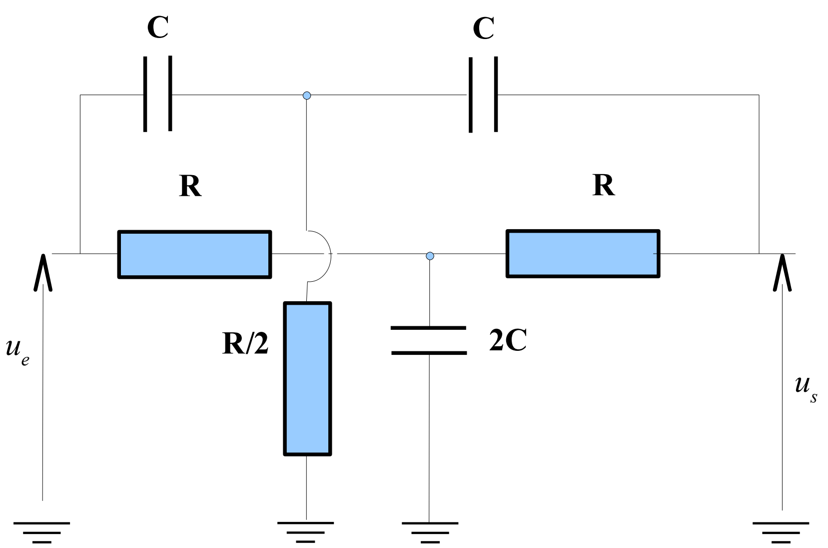
- Établir la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$.

- L'écrire sous la forme canonique à choisir entre les deux formes possibles: $\underline{H}(j\omega)=\frac{H_0}{(1+j\frac{\omega}{\omega_0})}$ ou $\underline{H}(j\omega)=H_0\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{(1+j\frac{\omega}{\omega_0})}$.
- Calculer H_0 et f_0 (fréquence de coupure) avec $E=10{,}0\,V$, $R_1=9{,}0\,k\Omega$, $R_2=1{,}00\,k\Omega$, $C=1{,}00\,\mu F$.

5. Établir l'équation des asymptotes pour le diagramme de Bode du gain: G_{dB} en fonction de ω (l'échelle des abscisses est logarithmique) et en déduire, avec le plus de détails possibles, l'allure du tracé.

II. Deuxième partie

On envisage désormais cet autre montage (voir figure):



La sortie est ouverte (le filtre ne débite pas de courant). La tension d'entrée est sinusoïdale de pulsation ω .

6. Prévoir qualitativement la nature du filtre.

7. Mettre en équation le système en repérant les trois nœuds utiles.

8. Établir la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$. L'écrire sous la forme: $\underline{H}=\frac{1-x^2}{1-x^2+4jx}$.

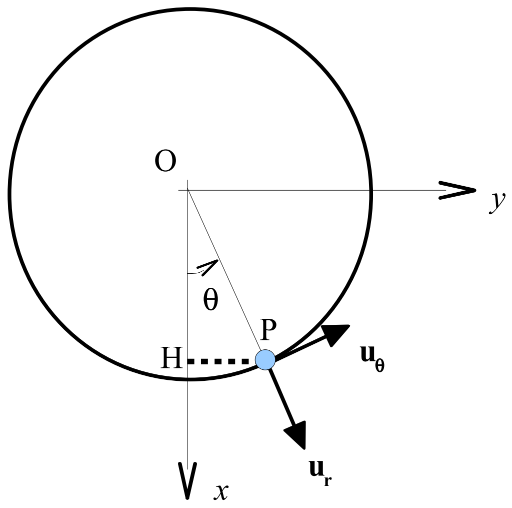
9. Définir les fréquences de coupure de ce filtre.

10. Déterminer les fréquences de coupure et exprimer alors la bande qui caractérise le filtre.

Mécanique du point

I. Première partie

Un petit anneau P de masse m, assimilable à un point matériel, coulisse, sans frottements, sur un guide circulaire de centre O et de rayon a. Le mouvement du point P est repéré par l'angle θ. Le référentiel $\mathscr{R}$: $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ lié au cercle est galiléen. L'axe Ox est vertical vers le bas et l'axe Oy est horizontal dans le plan du cercle. On définit la base locale cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ liée au point P. Sur la figure, H désigne le projeté orthogonal de P sur Ox. L'accélération de la pesanteur est $\vec{g}=g\,\vec{u}_x$



A. Moment cinétique

On étudie les oscillations de l'anneau au voisinage de sa position d'équilibre par utilisation du théorème du moment cinétique.

1. Préciser le sens du vecteur unitaire $\vec{u}_z$ (vers l'avant ou vers l'arrière de la figure) pour que les bases citées plus haut soient directes.
2. Énoncer (texte en français) le théorème du moment cinétique en un point fixe pour un point matériel. Démontrer le théorème en utilisant la notation $\vec{\sigma}(O)=\vec{r}\wedge m\vec{v}$ pour le moment cinétique en O.
3. Équation différentielle:
   - Établir l'expression de $\vec{\sigma}(O)$ en fonction de θ (ou de ses dérivées) et des autres constantes du problème.
   - Donner l'expression du moment du poids en fonction de θ et des autres constantes du problème. Que peut-on dire du moment selon Oz de la réaction $\vec{R}$ du guide sur l'anneau en l'absence de frottement. Justifier.
   - En déduire l'équation différentielle du second ordre régissant le mouvement de l'anneau.

4. Équilibre:

- Que devient cette équation pour $\frac{d^2\theta}{dt^2}=0$. En déduire l'existence de deux positions d'équilibre θ_{eq1} et θ_{eq2} . Justifier.
- En partant du développement limité au premier ordre du moment des forces par rapport à Oz au voisinage de la position d'équilibre: $\mathcal{M}(\theta)=\mathcal{M}(\theta_{eq})+(\theta-\theta_{eq})\left(\frac{d\,\mathcal{M}(\theta)}{d\,\theta}\right)_{\theta=\theta_{eq}}$, montrer que l'une des positions d'équilibre est stable et que l'autre est instable.

B. Énergie

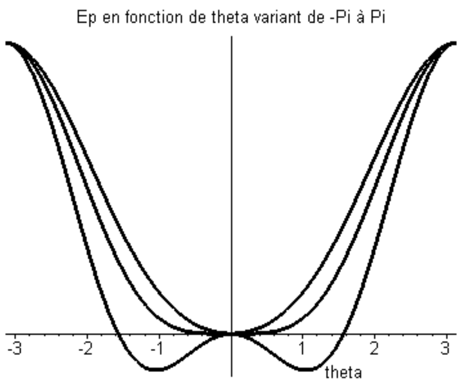
5. On pouvait étudier le problème par l'énergie.

- Justifier que l'énergie mécanique totale $E_{mécanique}$ est ici une constante.
- Quelle est la bonne formule donnant l'expression de l'énergie potentielle pour le poids parmi ces deux formules: $E_P=m\,g\,x$ ou $E_P=-m\,g\,x$. Justifier qualitativement votre choix puis démontrer la formule choisie.
- Donner l'expression de l'énergie mécanique totale $E_{mécanique}$.
- Retrouver l'équation différentielle précédente en partant de l'expression $E_{mécanique}$.

II. Deuxième partie

Désormais, le guide circulaire tourne à vitesse constante autour de Ox avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega}=\mathring{\varphi}\,\vec{u}_x$ avec $\mathring{\varphi}=\frac{d\,\varphi}{dt}=constante$. Le référentiel $\mathscr{R}$ lié au cercle n'est donc plus galiléen.

6. Donner l'expression des deux forces supplémentaires dont-il faut désormais tenir compte et montrer que seule l'une de ces forces possède un moment selon Oz . Donner l'expression de ce moment en fonction de θ et des constantes du problème.
7. Écrire l'équation différentielle du second ordre régissant le mouvement de l'anneau et déterminer les positions d'équilibre.
8. Le tracé de l'énergie potentielle totale fait apparaître trois cas possibles: selon que $\mathring{\varphi}$ est « petit », « grand » (on a aussi représenté l'énergie potentielle dans le cas limite intermédiaire). Déduire de ces courbes dans chaque cas la stabilité des positions d'équilibre.



9. On envisage le cas $\dot{\varphi}$ « grand ». En utilisant un développement limité, écrire l'équation différentielle du mouvement autour de la position d'équilibre stable notée θ_{eq} .

10. On envisage le cas limite défini . En utilisant un développement limité, écrire l'équation différentielle du mouvement autour de la position d'équilibre stable.

Optique géométrique

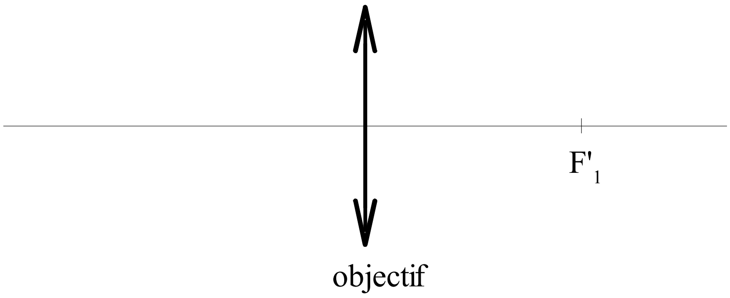
I. Première partie

A. Lentille convergente

Un objectif d'appareil photographique peut être modélisé par une lentille convergente $(L1)$ de focale $f_1'=50\ mm$. On veut photographier un objet AB , perpendiculaire à l'axe de la lentille, haut de $h=\overline{AB}=2m$ et distant de $L=50m\gg f'_1$ de la lentille. Le point A se trouve sur l'axe de la lentille.

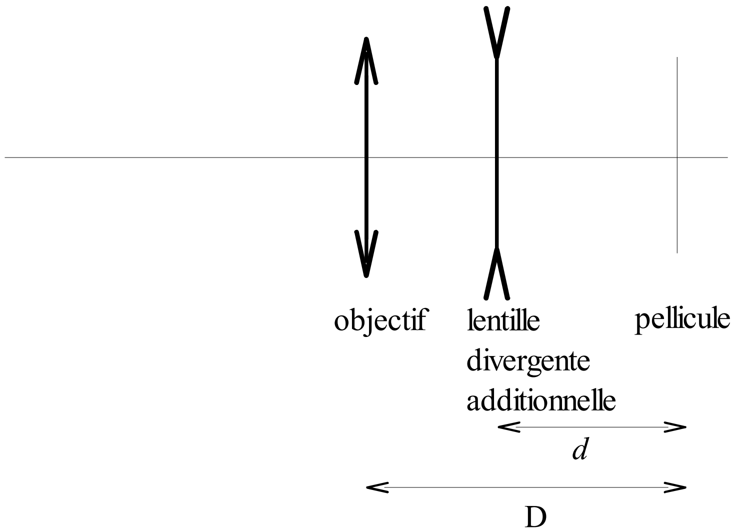
1. Où le plan de la pellicule (P) doit-il se trouver? Sur une figure: *figure1* , représenter le trajet de la toute la lumière issue de A et traversant la lentille. Idem (utiliser une autre couleur) pour la lumière issue de B . Indiquer l'image $A'B'$.

2. Déterminer la taille $\overline{A'B'}$ de l'image sur la pellicule. Réponse littérale puis numérique.



B. Lentille convergente + lentille divergente

On ajoute une lentille divergente $(L2)$ de focale f'_2 entre la lentille convergente $(L1)$ et le plan de la pellicule (P) . La position de l'objectif est modifiée de telle façon que l'image finale se forme toujours sur la pellicule. On désigne par d la distance fixée entre la lentille divergente et le plan de la pellicule.



3. L'image $A'B'$ donnée par l'objectif joue le rôle d'objet pour la lentille divergente. Dans quelle zone cet objet $A'B'$ peut-il se trouver pour que l'image finale $A''B''$ soit effectivement réelle?

4. Déterminer la relation entre d et f'_2 pour que le grandissement γ_2 apporté par la lentille divergente soit égal à 2 (doubleur de focale). Vérifier par une construction de l'image, donnée par la lentille divergente, dans le cas particulier étudié ici ($figure\,2$). Expliquer la construction.

5. On donne $f'_2=-40\,mm$. Déterminer la distance D entre la lentille convergente et la pellicule.

II. Deuxième partie

On revient au cas de départ (une seule lentille convergente $(L1)$). L'objectif est muni d'un diaphragme de rayon $R=0,5\,mm$, accolé à la lentille. L'appareil photo envisagé est rudimentaire et ne dispose pas de dispositif de mise au point. Le plan de la pellicule est positionné de telle façon que l'image d'un objet placé à une distance H en A_0 devant la lentille soit nette

6. Compléter la $figure\,3$ représentant le trajet d'un rayon partant de A_0 et frappant la lentille à une distance R de l'axe optique. En déduire la position de l'image A'_0 , c'est-à-dire la position de la pellicule fixée par le constructeur. (On utilisera la propriété du rayon passant par l'axe optique de ne subir aucune déviation).

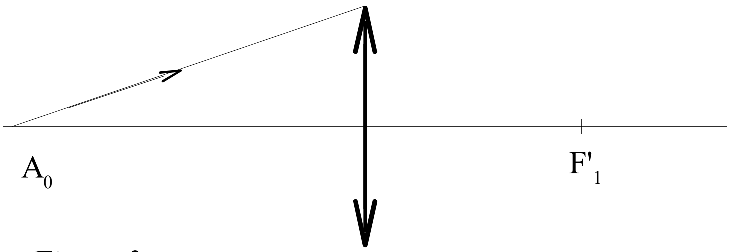


Figure 3

7. Compléter la $figure\,4$ représentant le trajet d'un rayon partant de A_1 à l'infini et frappant la lentille à une distance R de l'axe optique. On indiquera sur cette figure la position de la pellicule obtenue précédemment. Le faisceau issu de A_1 ne donne plus un point sur la pellicule mais forme un disque de rayon r_1 . Donner l'expression de r_1 en fonction des données de l'énoncé (f'_1 , R , H).

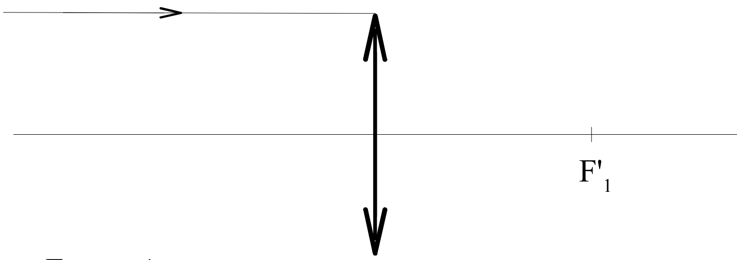


Figure 4

8. On admet que la tâche image est acceptable si son rayon est inférieur à $r=0,015\,mm$. La distance H a été choisie de telle façon que la tâche image pour l'objet à l'infini soit acceptable à la limite. En déduire la valeur de H (désignée par hyperfocale).

9. Faire une figure: $figure\,5$ représentant le trajet d'un rayon partant de A_2 (plus proche de la lentille que A_0) et frappant la lentille à une distance R de l'axe optique. En déduire la position de l'image A'_2 . Déterminer le rayon de la tâche image r_2 .

10.Quel est le point le plus proche de la lentille dont l'appareil photo donne, en étant réglé sur l'hyperfocale, une image acceptable?

Thermodynamique

I. Première partie

A. Transformations thermodynamiques

On considère n moles de gaz parfait, à la pression P_0 et à la température T_0 . La constante des gaz parfaits est R et le rapport des capacités thermiques molaires γ est supposé indépendant de la température.

1. Démontrer, à l'aide de la relation de Mayer et de la définition du rapport γ , l'expression de la capacité thermique molaire à pression constante $C_{P,m}$ et celle de la capacité thermique molaire à volume constante $C_{V,m}$.

La gaz subit le cycle de transformations suivant:

- lent refroidissement isobare qui réduit le volume de moitié ($transformation\, a$)
- lent réchauffement isochore qui double la pression ($transformation\, b$)
- lente détente isotherme ($transformation\, c$)

2. Tracer le diagramme de Clapeyron. Indiquer le sens de parcours sur le cycle et prévoir en justifiant le raisonnement si ce cycle est un cycle moteur (type moteur thermique) ou récepteur (type réfrigérateur ou pompe à chaleur).
3. Pour chacune de ces trois transformations, établir ΔU (variation d'énergie interne), ΔH (variation d'enthalpie), W (travail reçu par la gaz), Q (chaleur reçue par le gaz). On exprimera les résultats en fonction des données: n , P_0 , T_0 , R , γ . On recopiera les résultats dans un tableau clair.

B. Efficacité du cycle

4. Déterminer l'efficacité η (ou rendement thermodynamique du cycle).
5. En prenant pour température de la source chaude d'un cycle ditherme, la température T_{chaud} la plus élevée de ce cycle et pour température de la source froide d'un cycle ditherme la température T_{froid} la plus basse de ce cycle, déterminer l'efficacité maximale du cycle ditherme η_{rev} et comparer à la valeur obtenue η à la question précédente.

II. Deuxième partie

Ce cycle est en fait un cycle ditherme réalisé avec une source froide et une source chaude. On suppose qu'à la fin d'une transformation, l'équilibre thermique est réalisé entre le gaz et la source avec laquelle il se trouve en contact.

6. Pour chacune des trois transformations indiquer si le contact du système se fait avec la source froide ou avec la source chaude.
7. La transformation c est supposée réversible. Par contre les deux transformations a et b sont obligatoirement irréversibles pour l'ensemble gaz+ sources. Expliquer, justifier, commenter.

8. Démontrer l'expression donnant la variation d'entropie pour n moles de gaz parfait passant de l'état (P_1, T_1) à l'état (P_2, T_2) .

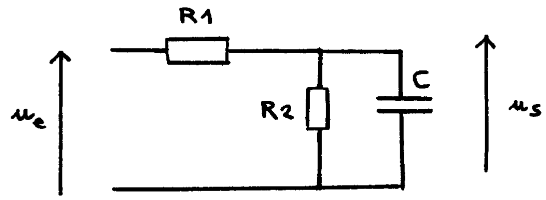
9. Pour les transformations a et b , déterminer l'entropie échangée par le gaz et l'entropie créée. En déduire $S_{créé}$, entropie créée au total au cours d'un cycle.

10. Vérifier que $\eta = \eta_{rev} - \frac{T_{froid} S_{créé}}{Q_{chaud}}$ où Q_{chaud} désigne la quantité de chaleur reçue par le gaz de la source chaude au cours d'un cycle et $S_{créé}$ désigne l'entropie créée au cours du même cycle.

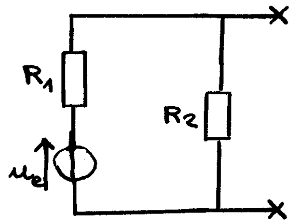
Réponses

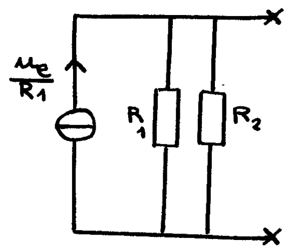
Électrocinétique

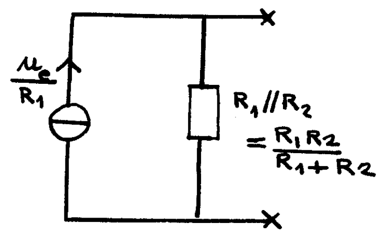
1)



R2 et C sont en parallèle.
On peut choisir différentes méthodes pour obtenir $u_S(t)$
Ici on choisit de transformer le générateur d'entrée :

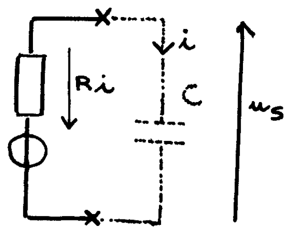






$R = R_1 // R_2$

$e = \frac{u_e}{R_1} \times R_1 // R_2$



On se ramène au traditionnel RC série alimenté par un générateur de tension

$$u_s = e - R i \quad \text{avec} \quad i = C \frac{du_s}{dt} \quad \text{(Ohm)}$$

$$u_s = \frac{u_e (R_1 \| R_2)}{R_1} - (R_1 \| R_2) C \frac{du_s}{dt}$$

$$\boxed{u_s + \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \frac{du_s}{dt} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_e}$$

Remarque :

en utilisant la loi des noeuds termes de potentiels (cf Millman)

$$\frac{u_e - u_s}{R_1} + \frac{0 - u_s}{R_2} + C \frac{d}{dt}(0 - u_s) = 0$$

c'est beaucoup plus rapide .

---

2) $\longrightarrow$ Pour $t > 0$, on doit résoudre :

$$u_s + \tau \frac{du_s}{dt} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

$$u_s = A e^{-t/\tau} + \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$$

En $t = 0^-$ le condensateur était déchargé et on sait que la tension aux bornes d'un condensateur est une grandeur continue. Donc en $t = 0^+$ u_s est encore nul

C.I. $\quad 0 = A \times 1 + \dfrac{R_2 E}{R_1 + R_2}$

Finalement :

$$\boxed{u_s = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

avec

$$\boxed{\tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}}$$

→ A.N. $\tau = \dfrac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$

$= \dfrac{9.10^3 \ 1.10^3 \ 1.10^{-6}}{9.10^3 + 1.10^3}$

$$\boxed{\tau = 0{,}90 \text{ ms}}$$

Si $t \to \infty$, $u_s = \dfrac{R_2}{R_1+R_2} E$

$= \dfrac{10^3}{9.10^3 + 1.10^3} \ 10{,}0$

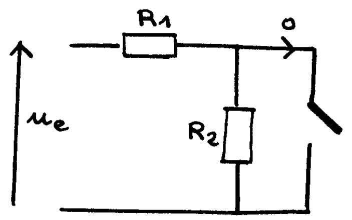
$$\boxed{u_{s,\lim} = 1{,}00 \text{ V}}$$

---

3) L'impédance du condensateur est $\underline{Z} = \dfrac{1}{jC\omega}$.

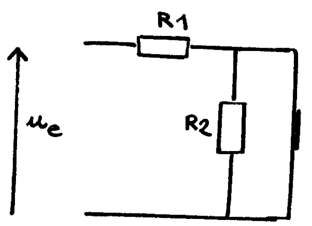
- A fréquence basse ($\omega \to 0$), l'impédance devient infinie. Le courant ne passe pas en régime sinusoïdal forcé, comme si le condensateur était un interrupteur ouvert.
- A fréquence élevée ($\omega \to \infty$), l'impédance devient nulle. Le condensateur fait court-circuit (interrupteur fermé)

$\omega \to 0$



$u_s = \dfrac{R_2}{R_2+R_1} u_e$
(cf diviseur de tension à vide)

$\omega \to \infty$



$u_s = 0$
(cf court-circuit)

$$\boxed{\text{Le filtre est un passe-bas}}$$

---

4) $\longrightarrow$ On part de l'équation différentielle :

$$u_S + \tau \frac{du_S}{dt} = \frac{R_2}{R_1+R_2} u_e$$

On travaille en complexes

$$\underline{u_S} + \tau \frac{d\underline{u_S}}{dt} = \frac{R_2}{R_1+R_2} \underline{u_e}$$

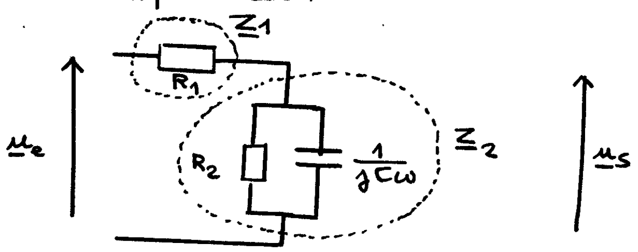
$$\underline{u_S} + j\omega\tau \, \underline{u_S} = \frac{R_2}{R_1+R_2} \underline{u_e}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u_S}}{\underline{u_e}}$$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{R_2}{R_1+R_2}}{1+j\omega\tau}}$$

Remarque :

on pourrait obtenir le résultat en utilisant les impédances.



On utilise les diviseurs de tension

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_2} + \underline{Z_1}} \quad \text{avec } \underline{Z_2} = \frac{1}{\underline{Y_2}}$$

$$= \frac{1}{1 + \underline{Z_1}\,\underline{Y_2}}$$

$$= \frac{1}{1 + R_1\left(\frac{1}{R_2} + jC\omega\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{R_2+R_1}{R_2} + jR_1C\omega}$$

$$= \frac{R_2/(R_1+R_2)}{1 + j\frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}\,\omega}$$

→ Donc
$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

(filtre passe-bas du premier ordre)

avec
$$\boxed{H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}}$$

→ A.N.
$$H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$
$$= \frac{1\ 10^3}{9\ 10^3 + 1\ 10^3}$$
$$\boxed{H_0 = 0{,}100}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{9\ 10^3 + 1\ 10^3}{9\ 10^3\ 1\ 10^3\ 10^{-6}}$$
$$\boxed{f_0 = 177\ \text{Hz}}$$

---

5)
$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

<u>Si $\omega \ll \omega_0$</u> $\underline{H}$ se comporte comme H_0

Le gain se comporte comme H_0 (positif)

$$\boxed{G_{dB\ \text{asymptote}} = 20 \log H_0}$$
$$\boxed{G_{dB\ \text{asymptote}} = 20 \log \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

<u>Si $\omega \gg \omega_0$</u> $\underline{H}$ se comporte comme $\dfrac{H_0}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$

Le gain se comporte comme $\dfrac{H_0}{\frac{\omega}{\omega_0}}$

$$\boxed{G_{dB\,\text{asymptote}} = 20\log H_0 - 20\log\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$= 20\log\frac{R_2}{R_1+R_2} - 20\log\frac{\omega R_1R_2C}{R_1+R_2}$$

$$= -20\log(R_1C\omega)$$

La pente est de -20 dB par décade

<u>si $\omega = \omega_0$</u>

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1+j}$$

$$G = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$$

$$G_{dB} = 20\log H_0 - 20\log\sqrt{2}$$

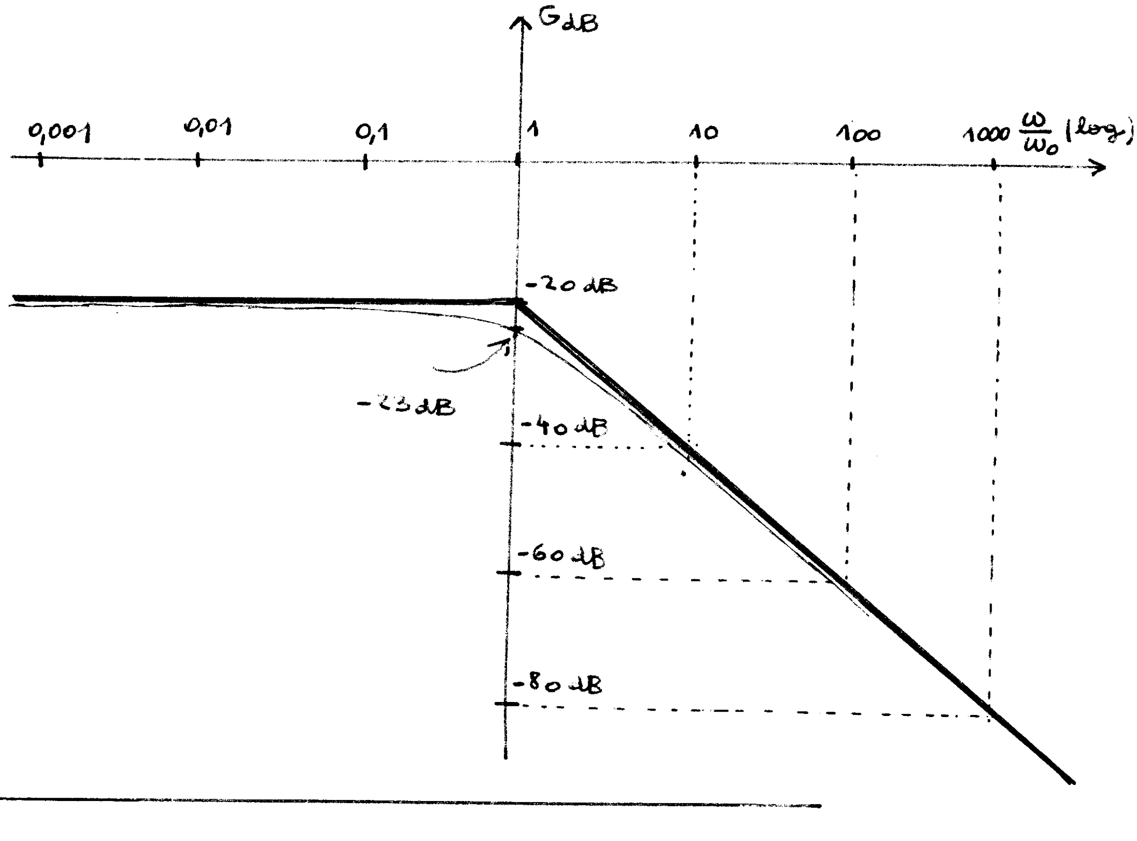
$$= 20\log H_0 - 10\underbrace{\log 2}_{0{,}30103}$$

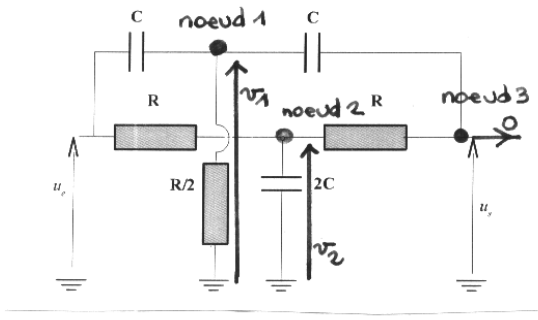
$$\boxed{G_{dB} = 20\log H_0 - 3{,}0}$$

<u>A.N.</u>

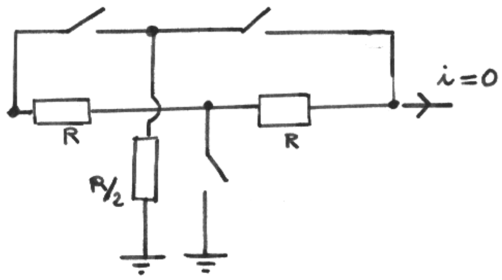
$$20\log H_0 = 20\log\frac{1}{10}$$

$$= -20\text{ dB}$$

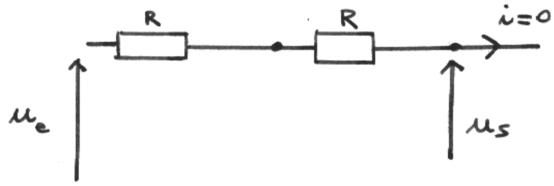




6) $\omega \to 0$

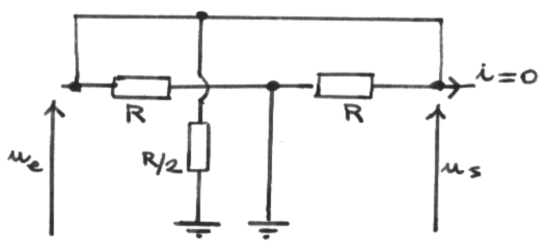


équivalent à :



L'intensité ne peut passer dans les R (circuit ouvert).
Donc pas de chute de tension dans les R et $u_s = u_e$

$\omega \to \infty$



Le fil du haut réalise un court-circuit entre entrée et sortie donc $u_s = u_e$

Ce filtre est un coupe-bande (rejecteur de bande)

---

7) on utilise Millman:

noeud 1 : $\underline{v_1} = \dfrac{jC\omega\,\underline{u_e} + jC\omega\,\underline{u_s}}{jC\omega + jC\omega + \frac{2}{R}} = \boxed{\dfrac{jC\omega\,(\underline{u_e}+\underline{u_s})}{2(jC\omega+\frac{1}{R})} = \underline{v_1}}$

noeud 2 : $\underline{v_2} = \dfrac{\frac{1}{R}\,\underline{u_e} + \frac{1}{R}\,\underline{u_s}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R} + jC\omega} = \boxed{\dfrac{\frac{1}{R}\,(\underline{u_e}+\underline{u_s})}{2(jC\omega+\frac{1}{R})} = \underline{v_2}}$

"noeud" 3 : pas de courant de sortie

$$\boxed{\underline{u_s} = \frac{jC\omega\,\underline{v_1} + \frac{1}{R}\underline{v_2}}{jC\omega + \frac{1}{R}}}$$

---

8) on reporte $\underline{v_1}$ et $\underline{v_2}$ dans l'équation du noeud 3 :

$$\underline{u_s} = \frac{\left((jC\omega)^2 + \left(\frac{1}{R}\right)^2\right)(\underline{u_e}+\underline{u_s})}{2\,(jC\omega+\frac{1}{R})^2}$$

$$2\,\underline{u_s}\left(\frac{1}{R^2} - C^2\omega^2 + \frac{2jC\omega}{R}\right) = \left(\frac{1}{R^2} - C^2\omega^2\right)(\underline{u_e}+\underline{u_s})$$

$$\underline{u_s}\left(\frac{1}{R^2} - C^2\omega^2 + \frac{4jC\omega}{R}\right) = \left(\frac{1}{R^2} - C^2\omega^2\right)\underline{u_e}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{\frac{1}{R^2} - C^2\omega^2}{\frac{1}{R^2} - C^2\omega^2 + \frac{4jC\omega}{R}}$$

$$\underline{H} = \frac{1 - R^2C^2\omega^2}{1 - R^2C^2\omega^2 + 4jRC\omega}$$

on pose $x = RC\omega = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ avec $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + 4jx}}$$

---

9) On peut écrire aussi :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{4x}{1-x^2}\right)}$$

on voit que

$$G = |\underline{H}| \leqslant 1$$

Le gain maximal est obtenu :

- pour $\omega = 0$ $(x=0)$ à basse fréquence
- pour $\omega \to \infty$ $(x \to \infty)$ à haute fréquence.

Les fréquences de coupure sont les fréquences pour lesquelles

$$G = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{G = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

---

10) Les fréquences de coupure sont telles que :

$$\left|\frac{4x}{1-x^2}\right| = 1$$

- $\frac{4x}{1-x^2} = 1$ soit $x_B = -2+\sqrt{5}$ (valeur positive)
- $\frac{4x}{1-x^2} = -1$ soit $x_H = 2+\sqrt{5}$ (valeur positive)

$$\boxed{\begin{array}{l} f_B = (\sqrt{5}-2)\ f_0 \\ f_H = (\sqrt{5}+2)\ f_0 \end{array}}$$

(avec $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$)

→ bande passante du filtre

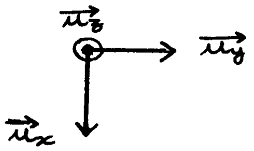
$$[0, f_B] \cup [f_H, \infty[$$

→ bande coupée du filtre

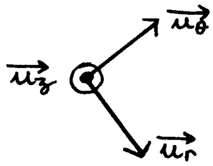
$$\boxed{[f_B\ ,\ f_H]}$$

Mécanique du point

1)



$(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$ base directe



$(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$ base directe

$\boxed{\vec{u_z} \text{ est dirigé vers l'avant de la figure}}$

---

2)

théorème du moment cinétique : Dans un référentiel galiléen, la dérivée du moment cinétique d'un point matériel en un point fixe est égale au moment des forces en ce point fixe.

$$\vec{\sigma}(O) = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

$$= \vec{OP} \wedge m\vec{v}_{(P)}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \underbrace{\underbrace{\frac{d\vec{OP}}{dt}}_{\substack{\downarrow \\ \vec{v}(P) \\ \text{puisque } O \\ \text{est fixe}}} \wedge m\vec{v}_{(P)}}_{\substack{\text{nul car} \\ \text{deux vecteurs} \\ \text{identiques}}} + \vec{OP} \wedge \underbrace{\frac{d}{dt}(m\vec{v}_{(P)})}_{\substack{\downarrow \\ \vec{F} \\ \text{(somme des forces} \\ \text{appliquées à } P \\ \text{dans le référentiel} \\ \text{galiléen)}}}$$

$$= \vec{OP} \wedge \vec{F}$$

$$= \vec{\mathcal{M}}_{(O)}\vec{F}$$

---

3) $\rightarrow$ $\overrightarrow{OP} = a\,\overrightarrow{u_r}$

$\overrightarrow{v_{(P)}} = a\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$ (mouvement circulaire)

$\overrightarrow{\sigma}(O) = a\,\overrightarrow{u_r} \wedge m a \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}(O) = m a^2 \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}}$$

$\rightarrow$ $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(O)}\,m\vec{g} = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{g}$

$= a\,\overrightarrow{u_r} \wedge m g\,\overrightarrow{u_x}$

$= a\,\overrightarrow{u_r} \wedge m g\,(\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta})$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(O)}\,m\vec{g} = -m g a \sin\theta\,\overrightarrow{u_z}}$$

En l'absence de frottements, la réaction est perpendiculaire à la vitesse du point P / guide ($\perp \overrightarrow{u_\theta}$)
Elle se trouve aussi dans le plan de symétrie du problème. La réaction est selon $\overrightarrow{u_r}$

$\overrightarrow{R} = R_r\,\overrightarrow{u_r}$

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(O)}\,\overrightarrow{R} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{R}$

$= a\,\overrightarrow{u_r} \wedge R_r\,\overrightarrow{u_r}$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(O)}\,\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}}$$

$\rightarrow$ th du $\vec{\sigma}$ en O fixe

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(O)}\,m\vec{g} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{(O)}\,\overrightarrow{R} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma}(O)$$

$$-m g a \sin\theta\,\overrightarrow{u_z} + \overrightarrow{0} = m a^2 \ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\sin\theta = 0}$$

---

4) $\rightarrow$ $\ddot{\theta} = 0$ donne $\sin\theta = 0$
On a supposé l'accélération angulaire nulle ce qui correspond à la position d'équilibre pour ce point en rotation sur un cercle guide.

on obtient donc deux positions différentes d'équilibre

$$\boxed{\begin{array}{c}\theta_{eq1} = 0 \\ \theta_{eq2} = \pi\end{array}}$$

→ On suppose θ proche de $\theta_{eq1} = 0$

$\mathcal{M} = -mga \sin\theta$

on fait le D.L. au premier ordre

$\simeq -mga \sin\theta_{eq1} + (\theta - \theta_{eq1}) \times -mga \cos\theta_{eq1}$

$\simeq 0 + \theta \times -mga$

(résultat évident)

$$\boxed{\mathcal{M} \simeq -mga\theta}$$

si $\theta > 0$ $\mathcal{M} < 0$ entraîne $\ddot{\theta} < 0$ donc rappel vers $\theta = 0$

si $\theta < 0$ $\mathcal{M} > 0$ entraîne $\ddot{\theta} > 0$ donc rappel vers $\theta = 0$

La position $\theta_{eq1} = 0$ est une position d'<u>équilibre stable</u>.

→ On suppose θ proche de $\theta_{eq2} = \pi$

$\mathcal{M} = -mga \sin\theta$

on fait le D.L. au premier ordre

$\simeq -mga \sin\theta_{eq2} + (\theta - \theta_{eq2}) \times -mga \cos\theta_{eq2}$

$\simeq 0 + (\theta - \pi) \times +mga$

$$\boxed{\mathcal{M} \simeq +mga(\theta - \pi)}$$

si $\theta > \pi$ $\mathcal{M} > 0$ entraîne $\ddot{\theta} > 0$ donc θ augmente et le point s'éloigne de $\theta = \pi$

si $\theta < \pi$ $\mathcal{M} < 0$ entraîne $\ddot{\theta} < 0$ donc θ diminue et éloignement

La position $\theta_{eq2} = \pi$ est une position d'<u>équilibre instable</u>

---

5) → On sait que le poids est une force conservative.
On sait <u>qu'il n'y a pas de frottements</u> et donc la réaction ne travaille pas.
L'énergie mécanique totale est donc conservée

→ L'axe vertical x est dirigé vers le bas.
On sait que l'énergie potentielle associée au poids est plus importante si l'altitude est plus élevée.
Ici, si x augmente, E_P doit diminuer.
Parmi les deux formules, on choisit $\underline{E_P = -mgx}$

Démonstration

$$m\vec{g} = -\overrightarrow{grad}\, E_P$$

$$dE_P = -m\vec{g}\ \vec{dl}$$

$$= -mg\,\vec{u_x}\,(dx\,\vec{u_x} + dy\,\vec{u_y} + dz\,\vec{u_z})$$

$$= -mg\,dx$$

$$E_P = -mgx\ \cancel{+\,cste}$$

choisie nulle ici

→ $$E_{mécanique} = E_c + E_P$$

avec $E_c = \frac{1}{2}mv^2$
$= \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$

avec $E_P = -mgx$
$= -mga\cos\theta$

$$\boxed{E_{mécanique} = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta}$$

→ On dérive par rapport au temps

$$0 = (ma^2\ddot{\theta} + mga\sin\theta)\dot{\theta}$$

La solution $\dot\theta = 0$ est une solution parasite qui apparait suite à l'introduction de l'énergie.

On a donc finalement :

$$m a^2 \ddot\theta + m g a \sin\theta = 0$$

$$\boxed{\ddot\theta + \frac{g}{a} \sin\theta = 0}$$

---

5) → Le référentiel n'est plus galiléen.
On doit tenir compte de la force d'inertie d'entrainement et de la force d'inertie de Coriolis.

La rotation est uniforme donc la force d'inertie d'entrainement est seulement centrifuge

$$\overrightarrow{F}_{i,\text{centrifuge}} = m \Omega^2 \overrightarrow{HP}$$

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{i,\text{centrifuge}} = m \dot\varphi^2 a \sin\theta \, \overrightarrow{u_y}}$$

La force d'inertie de coriolis vaut

$$\overrightarrow{F}_{i,\text{coriolis}} = -2m \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}_{/\mathcal{R}}$$

$$= -2m \, \dot\varphi \overrightarrow{u_x} \wedge a \dot\theta \overrightarrow{u_\theta}$$

$$= -2m\dot\varphi \left(\cos\theta \overrightarrow{u_r} - \sin\theta \overrightarrow{u_\theta}\right) \wedge a \dot\theta \overrightarrow{u_\theta}$$

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{i,\text{coriolis}} = -2 m a \dot\varphi \dot\theta \cos\theta \, \overrightarrow{u_z}}$$

→ Le moment d'une force en O est : $\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{F}$
Le moment en projection selon Oz est la projection :

$$\mathcal{M}_{Oz} = \overrightarrow{u_z} \left(\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{F}\right)$$

$$\mathcal{M}_{Oz \, \text{centrifuge}} = \overrightarrow{u_z} \left(a \overrightarrow{u_r} \wedge m \dot\varphi^2 a \sin\theta \, \overrightarrow{u_y} \right)$$

$$\boxed{\mathcal{M}_{Oz \, \text{centrifuge}} = m a^2 \dot\varphi^2 \sin\theta \cos\theta}$$

$$\boxed{\mathcal{M}_{Oz \, \text{coriolis}} = 0}$$

(cf deux fois $\overrightarrow{u_z}$, produit mixte nul)

---

7) cf 3)

Dans le référentiel tournant, on a:

$\vec{\sigma}(O) = m a^2 \dot\theta \, \vec{u_z}$ (selon $\vec{u_z}$)

$\vec{\mathcal{M}}(O)_{m\vec{g}} = -mga \sin\theta \, \vec{u_z}$ (selon $\vec{u_z}$)

$\vec{R} = R_r \vec{u_r} + R_z \vec{u_z}$

(il n'y a plus de plan de symétrie. R_z existe "à cause" de la force de Coriolis)

$\vec{\mathcal{M}}(O)_{\vec{R}} = -a R_z \vec{u_\theta}$ (pas selon $\vec{u_z}$)

$\vec{\mathcal{M}}(O)_{\vec{F}_{centrif}} = m a^2 \dot\varphi^2 \sin\theta \cos\theta \, \vec{u_z}$ (selon $\vec{u_z}$)

$\vec{\mathcal{M}}(O)_{\vec{F}_{Coriolis}} = 2 m a^2 \dot\varphi \dot\theta \cos\theta \, \vec{u_\theta}$ (pas selon $\vec{u_z}$ cf 6))

→ On écrit le théorème du moment cinétique, en projection selon Oz

$$-mga \sin\theta + m a^2 \dot\varphi^2 \sin\theta \cos\theta = m a^2 \ddot\theta$$

$$\boxed{\sin\theta \left(-\frac{g}{a} + \dot\varphi^2 \cos\theta\right) = \ddot\theta}$$

→ équilibre (cf $\mathcal{M}_{Oz} = 0$ ou $\ddot\theta = 0$)

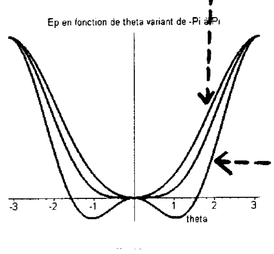
$\sin\theta = 0$: $\theta = 0$ ($eq,1$) ou $\theta = \pi$ ($eq,2$)

$\cos\theta = \dfrac{g/a}{\dot\varphi^2}$: $\theta_{eq,3}$ ou $\theta_{eq,3'} = -\theta_{eq,3}$

(possible si $|\dot\varphi| > \sqrt{\frac{g}{a}}$)

---

8)



$|\dot\varphi| < \sqrt{\frac{g}{a}}$: $\theta_{eq,1} = 0$ stable (cf minimum de Ep)

$\theta_{eq,2} = \pi$ instable (cf maximum de Ep)

$|\dot\varphi| > \sqrt{\frac{g}{a}}$: $\left.\begin{matrix}\theta_{eq,1} = 0 \\ \theta_{eq,2} = \pi\end{matrix}\right\}$ instables

$\theta_{eq,3}$ et $\theta_{eq,3'}$ stables cas intermédiaire : $|\dot{\varphi}| = \sqrt{\frac{g}{a}}$

$\theta_{eq,1} = \theta_{eq,3} = \theta_{eq,3'} = 0$ stable

$\theta_{eq,2} = \pi$ instable

---

9) On part de l'équation différentielle du mouvement :

$$\sin\theta \left(-\frac{g}{a} + \dot{\varphi}^2 \cos\theta\right) = \ddot{\theta}$$

et on l'écrit au voisinage de $\theta_{eq} = \theta_{eq,3}$ avec $\frac{g}{a} = \cos\theta_{eq}\, \dot{\varphi}^2$

$$\underbrace{\sin\theta}_{\simeq \sin\theta_{eq} + (\theta-\theta_{eq})\cos\theta_{eq}} \; \dot{\varphi}^2 \; \underbrace{(\cos\theta - \cos\theta_{eq})}_{\simeq (\theta-\theta_{eq}) \times -\sin\theta_{eq}} = \ddot{\theta}$$

(D.L. au premier ordre) (D.L. au premier ordre)

Au premier ordre en $(\theta - \theta_{eq})$ on obtient :

$$-(\theta-\theta_{eq}) \sin^2\theta_{eq} \; \dot{\varphi}^2 = \ddot{\theta}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \underbrace{\dot{\varphi}^2\left(1 - \frac{(g/a)^2}{\dot{\varphi}^4}\right)}_{\omega_0^2} (\theta - \theta_{eq}) = 0}$$

donc oscillations de période $\frac{2\pi}{\omega_0}$

---

10) Idem, on part de :

$$\sin\theta \left(-\frac{g}{a} + \dot{\varphi}^2 \cos\theta\right) = \ddot{\theta}$$

avec ici $\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{a}$ et au voisinage de $\theta = 0$

$$\dot{\varphi}^2 \sin\theta \,(\cos\theta - 1) = \ddot{\theta}$$

Il faut ici pousser le développement à l'ordre 3 en θ :

$$\dot{\varphi}^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right)\left(-\frac{\theta^2}{2}\right) = \ddot{\theta}$$

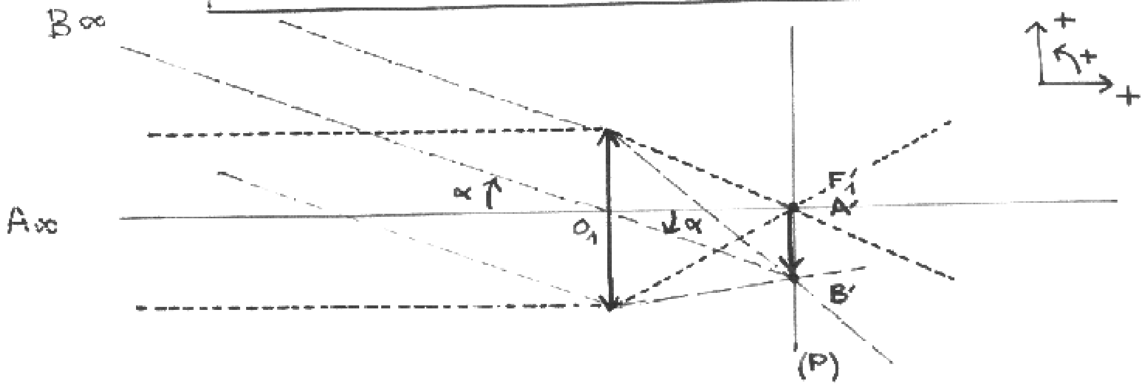
$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\dot{\varphi}^2}{2}\theta^3 = 0}$$

Les oscillations ne sont pas harmoniques.

Optique géométrique

1) Puisque $L \gg f'_1$, on peut considérer que l'objet est à l'infini. L'image se trouve dans le plan focal image de la lentille.

$$\boxed{(P) \text{ est le plan focal image}}$$



2) Le diamètre apparent α est l'angle sous lequel on voit AB à l'infini. Sur la figure α est compté négativement.

$$\tan(\alpha) = \boxed{\alpha = -\frac{\overline{AB}}{L}}$$

A.N.
$$= -\frac{2}{50}$$

$$\boxed{\alpha = -0{,}040 \text{ rad}}$$

La taille de l'image est

$$\boxed{\overline{A'B'} = f'_1 \ \alpha}$$

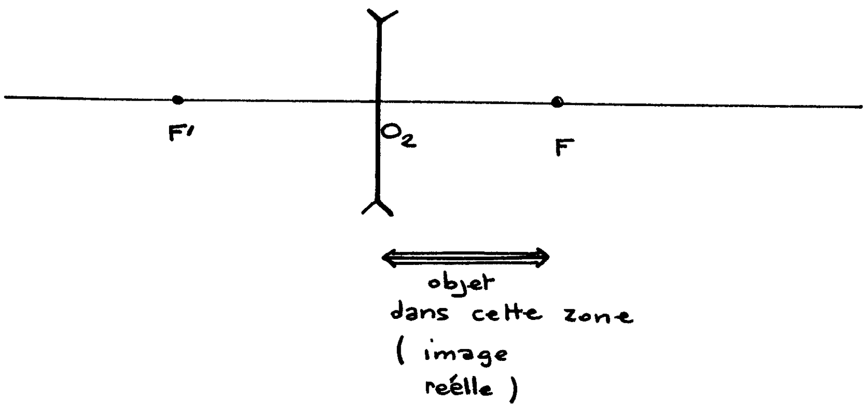
A.N.
$$\overline{A'B'}_{/mm} = 50 \times -0{,}04$$

$$\boxed{\overline{A'B'} = -2{,}0\text{ mm}}$$

L'image est donc inversée.

3) On sait que : pour que l'image donnée par une lentille divergente soit réelle, il faut que l'objet soit placé entre le centre optique et le foyer objet

(c'est donc un objet virtuel)



démonstration par calcul (A : objet , A' : image)

- On a $f' = \overline{OF'} < 0$ (lentille divergente)

  on veut $p' = \overline{OA'} > 0$ (image réelle donc derrière la lentille)

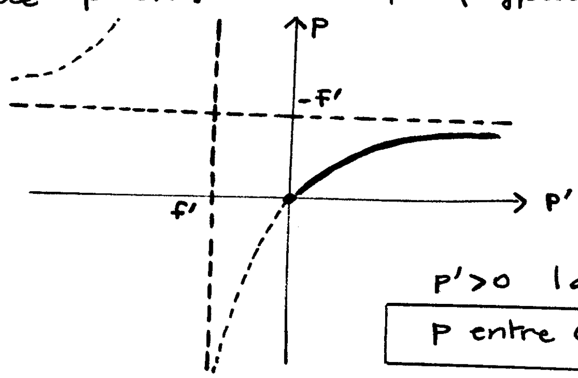
  On cherche :

  $p = \overline{OA}$

- avec $-\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'}$ (formule de conjugaison)

$$\boxed{p = \frac{f'p'}{f'-p'}}$$

- On trace p en fonction de p' (hyperbole équilatère)



$p' > 0$ (avec $f' < 0$)

$\boxed{p \text{ entre } 0 \text{ et } -f'}$

4) Les relations pour la lentille divergente (avec les notations habituelles)

$$-\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f'_2} \qquad (\text{avec } p'=d)$$

$$\gamma=\frac{p'}{p} \qquad (\text{avec } \gamma=2)$$

donc $p=\frac{p'}{\gamma}=\frac{d}{\gamma}$

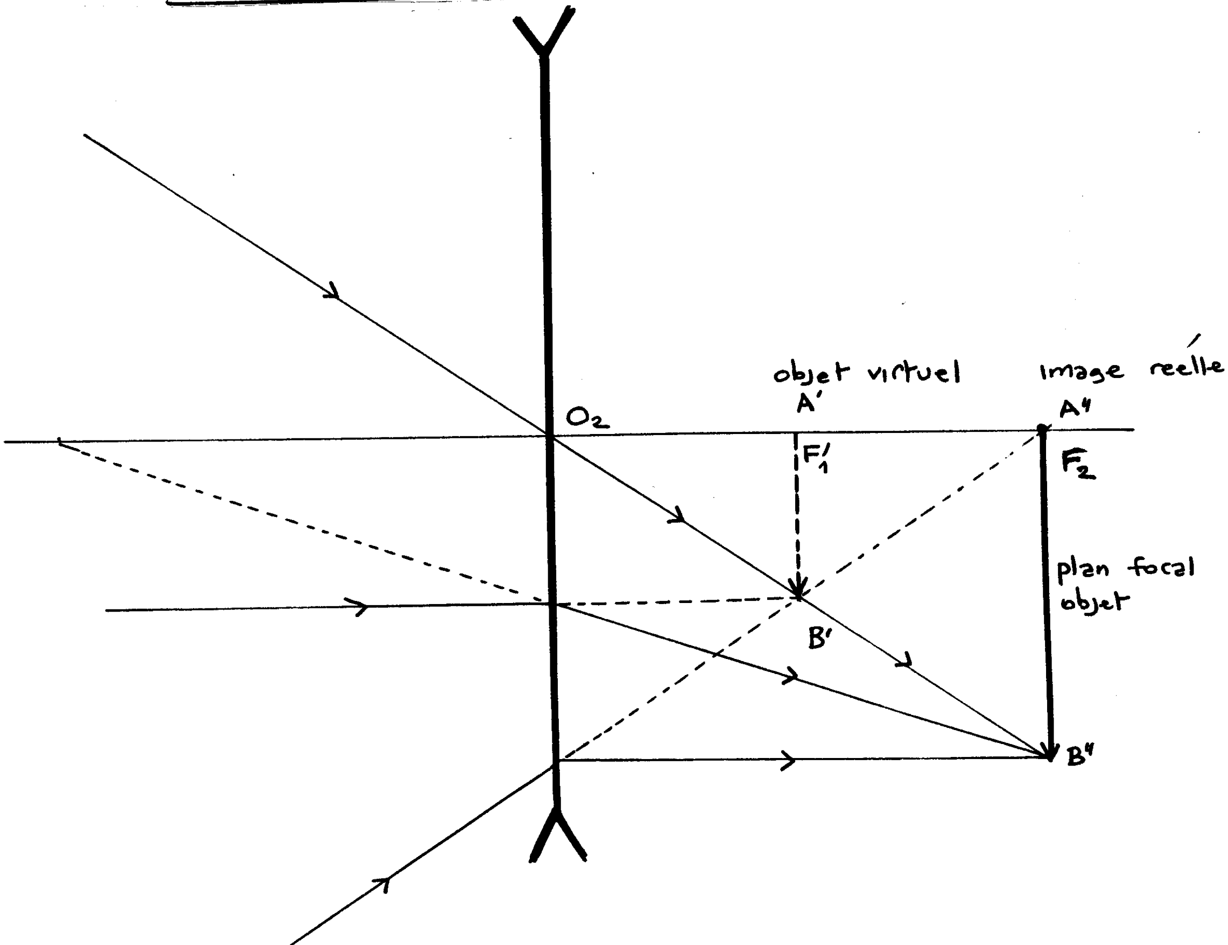
La relation de conjugaison devient

$$-\frac{\gamma}{d}+\frac{1}{d}=\frac{1}{f'_2}$$

$$\boxed{d=(1-\gamma)\,f'_2}$$

A.N.

$$\boxed{d=-f'_2}$$



5)

$$\mathcal{D} = \overline{O_1F_2}$$
$$= \overline{O_1F'_1} + \overline{F'_1F_2}$$
$$= \overline{O_1F'_1} + \overline{O_2F_2} - \underbrace{\overline{O_2F'_1}}_{\overline{O_2A'}}$$
$$= f'_1 + d - \frac{d}{\gamma_2}$$

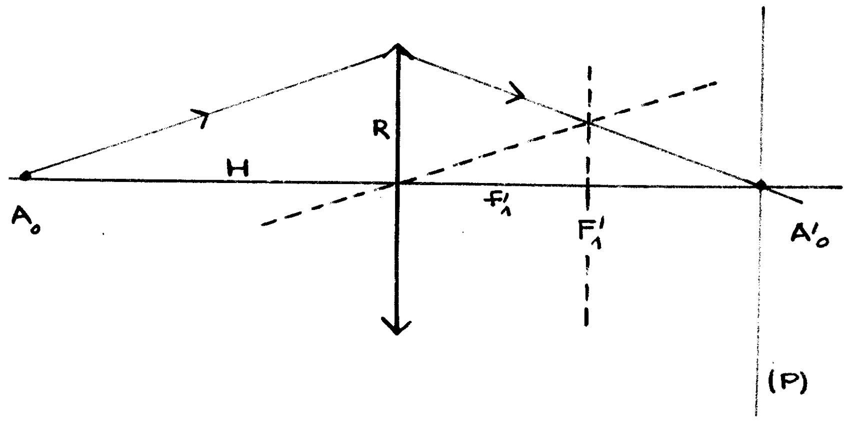
$$\boxed{\mathcal{D} = f'_1 - f'_2 \left(1 - \frac{1}{\gamma_2}\right)}$$

A.N. $\;\;{/}_{mm} = 50 - (-40)\left(1 - \frac{1}{2}\right)$

$$\boxed{\mathcal{D} = 70 \text{ mm}}$$

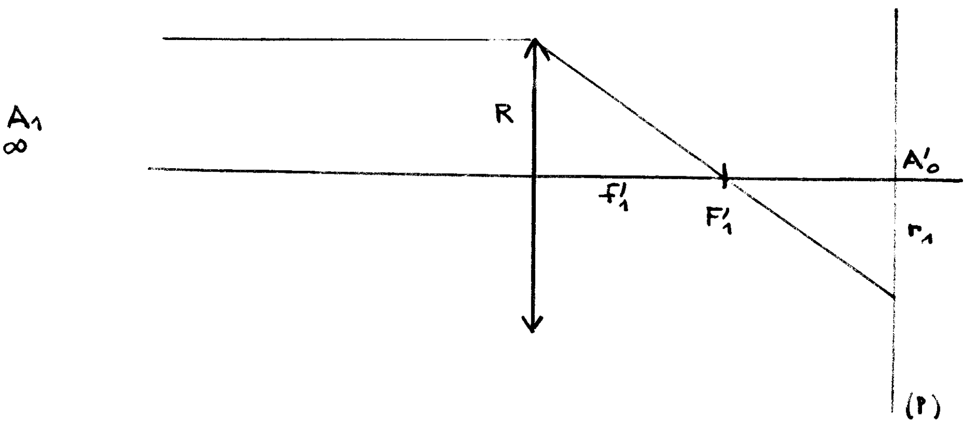
---

6)



---

7)



(r_1 désigne une grandeur positive)

Avec les triangles homothétiques :

$$\frac{r_1}{\overline{F'_1A'_0}} = \frac{R}{f'_1}$$

Il faut déterminer $\overline{F'_1A'_0}$ avec la figure en 6). Par exemple, en utilisant la formule de conjugaison de Newton

$$\sigma\sigma' = ff'$$

$$\overline{F_1A_0}\ \overline{F'_1A'_0} = -f'^2_1$$

$$-(H-f'_1)\overline{F'_1A'_0} = -f'^2_1$$

(on peut aussi résoudre avec les formules de Descartes)

Finalement :

$$\boxed{r_1 = R\,\frac{f'_1}{H-f'_1}}$$

---

8) On pose $\qquad r_1 = r$

donc

$$\boxed{H = f'_1\left(\frac{R}{r}+1\right)}$$

A.N.

$$= 50\ 10^{-3}\left(\underbrace{\frac{0{,}5\ 10^{-3}}{0{,}015\ 10^{-3}}}_{33{,}3}+1\right)$$

$$\boxed{H = 1{,}72\ \text{m}}$$

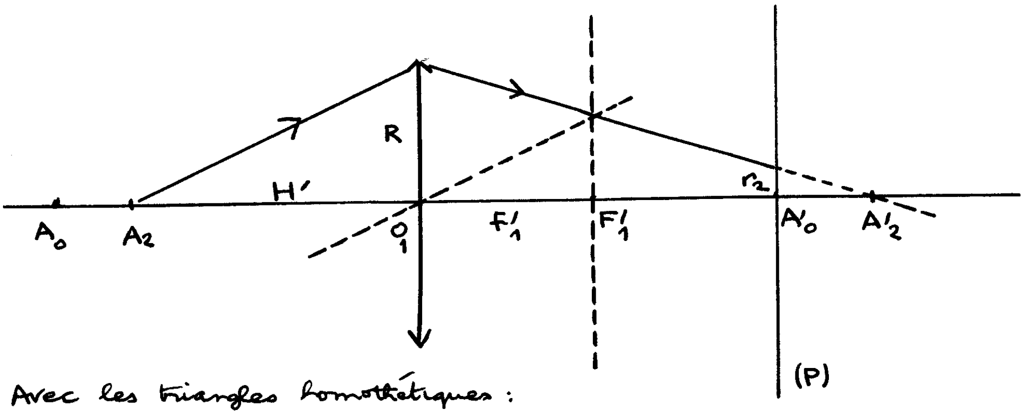
remarque :

L' approximation $R \gg r$ donne

$$H = f'_1\,\frac{R}{r} = 1{,}67\ \text{m}$$

---

9) Point plus proche que l' hyperfocale :



Avec les triangles homothétiques :

$$\frac{r_2}{\overline{A'_0A'_2}} = \frac{R}{\overline{O_1A'_2}}$$

$$\overline{A'_0A'_2} = \overline{O_1A'_2} - \overline{O_1A'_0}$$

$$r_2 = R\left(1 - \frac{\overline{O_1A'_0}}{\overline{O_1A'_2}}\right)$$

on travaille avec les formules de Descartes, par exemple

on avait : $\frac{1}{H} + \frac{1}{\overline{O_1A'_0}} = \frac{1}{f'_1}$

donc

$$\overline{O_1A'_0} = \frac{H f'_1}{H - f'_1}$$

Ici on posant

$$H' = -\overline{O_1A_2} \quad (>0)$$

$$\overline{O_1A'_2} = \frac{H' f'_1}{H' - f'_1}$$

$$\boxed{r_2 = R\left(1 - \frac{H}{H'}\,\frac{H' - f'_1}{H - f'_1}\right)}$$

---

10) on cherche H' tel que $r_2 = r$

$$\frac{r}{R} = 1 - \frac{H}{H'}\,\frac{H' - f'_1}{H - f'_1}$$

ce qui donne :

$$H' = H\,\frac{f'_1}{f'_1\left(1 - \frac{r}{R}\right) + \frac{r}{R}H}$$

On peut remplacer H par son expression $H = f'_1 \left(\frac{R}{r}+1\right)$

$$H' = H \frac{f'_1}{f'_1\left(1-\frac{r}{R}\right) + \frac{r}{R} f'_1 \left(\frac{R}{r}+1\right)}$$

$$\boxed{H' = \frac{H}{2}}$$

<u>L'appareil réglé sur l'hyperfocale donne une image satisfaisante entre l'infini et la moitié de l'hyperfocale.</u>

Thermodynamique

1) relation de Mayer : $C_{P,m} - C_{V,m} = R$

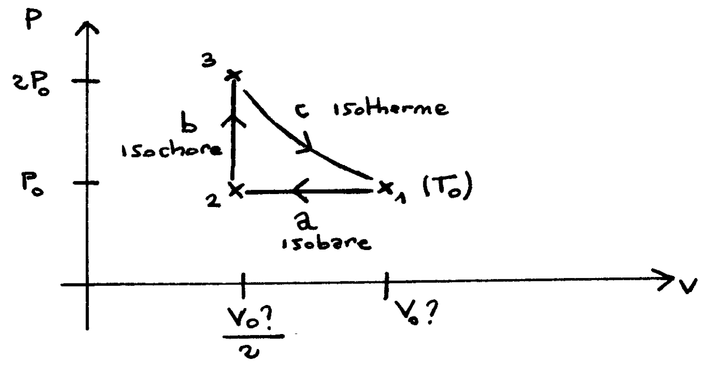
rapport des capacités thermiques molaires : $\dfrac{C_{P,m}}{C_{V,m}} = \gamma$

d'où

$$\boxed{\begin{aligned} C_{V,m} &= \frac{R}{\gamma-1} \\ C_{P,m} &= \frac{R\gamma}{\gamma-1} \end{aligned}}$$

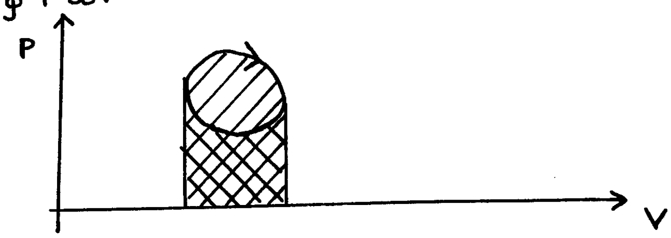
---

3)



Le cycle est décrit dans le sens horaire.

Le travail reçu par le gaz $W = \oint -P\,dV$ or l'aire A vaut $\oint P\,dV$



L'aire est donc positive

W reçu par le gaz est négatif

W fourni à l'extérieur par le gaz est donc positif

Ce cycle est donc un cycle moteur.

---

3) – Les coordonnées des différents points

(obtenues avec $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} = \frac{P_3V_3}{T_3} = nR$)

	T	P	V
1	T_0	P_0	$\frac{nRT_0}{P_0}$
2	$T_0/2$	P_0	$\frac{nRT_0}{2P_0}$
3	T_0	$2P_0$	$\frac{nRT_0}{2P_0}$

– Pour un gaz parfait :

$$\Delta U = \int_{\substack{\text{transformation}\\\text{envisagée}}} n\, C_{V,m}(T)\, dT$$

$$= n\, C_{V,m}\, \Delta T \quad \text{(si } \gamma \text{ indépendant de } T\text{)}$$

$$\Delta H = n\, C_{P,m}\, \Delta T \quad \text{(idem)}$$

De plus, on fera ici

$$W = \int_{\text{transformation}} - P_{ext}\, dV$$

$$Q = \Delta U - W$$

	transfo ⓐ isobare	transfo ⓑ isochore	transfo ⓒ isotherme
ΔU	$-\frac{nR}{\gamma-1}\frac{T_0}{2}$	$\frac{nR}{\gamma-1}\frac{T_0}{2}$	0 (isotherme)
ΔH	$-\frac{nR\gamma}{\gamma-1}\frac{T_0}{2}$	$\frac{nR\gamma}{\gamma-1}\frac{T_0}{2}$	0 (isotherme)
W	$W = \int_1^2 -P_0\, dV = -P_0(V_2 - V_1)$ $\frac{nRT_0}{2}$	0 (isochore)	$W = \int_3^1 -P\, dV = -nRT_0 \ln\frac{V_1}{V_3}$ $-nRT_0 \ln 2$
Q	$\Delta U - W$ ou ΔH $(= Q_P)$ $-\frac{nR\gamma}{\gamma-1}\frac{T_0}{2} < 0$	$\Delta U - \cancel{W} = \Delta U$ $(= Q_V)$ $\frac{nR}{\gamma-1}\frac{T_0}{2} > 0$	$W + Q = 0$ $+nRT_0 \ln 2 > 0$

4)

$$\eta = \frac{\text{travail reçu à l'extérieur}}{\text{chaleur donnée au gaz par source(s) chaude(s)}}$$

$$= \frac{(-W)_{cycle}}{Q_{chaud}}$$

$$= \frac{-\left(\frac{nRT_0}{2} - nRT_0 \ln 2\right)}{\frac{nR}{\gamma-1}\frac{T_0}{2} + nRT_0 \ln 2}$$

$$\boxed{\eta = \frac{\ln 2 - \frac{1}{2}}{\ln 2 + \frac{1}{2(\gamma-1)}}}$$

---

5) Expression de l'efficacité maximale d'un cycle ditherme ("rendement" de Carnot). On suppose donc un cycle ditherme réversible :

$$\Delta U = 0 = Q_{chaud} + Q_{froid} + W$$

$$\Delta S = 0 = \frac{Q_{chaud}}{T_{chaud}} + \frac{Q_{froid}}{T_{froid}}$$

$$\eta_{rev} = \frac{-W}{Q_{chaud}}$$

$$= \frac{Q_{chaud} + Q_{froid}}{Q_{chaud}}$$

$$= 1 + \frac{Q_{froid}}{Q_{chaud}}$$

$$\boxed{\eta_{rev} = 1 - \frac{T_{froid}}{T_{chaud}}}$$

avec $T_{chaud} = T_0$

$T_{froid} = \frac{T_0}{2}$

A.N. $\eta_{rev} = 1 - \frac{T_0/2}{T_0}$

$$\boxed{\eta_{rev} = 0{,}5}$$

On vérifie facilement que $\eta < \eta_{rev}$

---

6) a : refroidisst isobare (cf texte)
nécessité de contact avec la <u>source froide</u>
à la température $T_{froid} = \frac{T_0}{2}$

b : réchauffement isochore (cf texte)
nécessité de contact avec la <u>source chaude</u>
à la température $T_{chaud} = T_0$

c : détente donc la température du gaz devrait baisser. Pour que la détente soit isotherme, il faut fournir de la chaleur
Contact avec la <u>source chaude</u> T_0

---

7) a : l'extérieur est à $\frac{T_0}{2}$
le gaz passe de T_0 à $\frac{T_0}{2}$
Donc $\boxed{T_{système} \neq T_{extérieur}}$
<u>les échanges thermiques sont irréversibles</u>.

b : l'extérieur est à T_0
le gaz passe de $\frac{T_0}{2}$ à T_0
Donc $\boxed{T_{système} \neq T_{extérieur}}$
<u>Les échanges thermiques sont irréversibles</u>.

---

8)
$$dU = T\,dS - P\,dV$$
$$dH = T\,dS + V\,dP$$

On retrouve l'identité thermodynamique :

$$dS = \frac{dH}{T} - \frac{V\,dP}{T}$$

Pour n moles de gaz :

$$dS = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\frac{dT}{T} - nR\frac{dP}{P}$$

$$\boxed{\Delta S = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{T_2}{T_1} - nR\ln\frac{P_2}{P_1}}$$

---

9) on sait que $dS = \underbrace{\delta S_{\text{échange}}}_{\frac{\delta Q}{T_{\text{frontière}}}} + \delta S_{\text{créé}}$

	transfo ⓐ $\begin{vmatrix} P_0 \\ T_0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} P_0 \\ T_0/2 \end{vmatrix}$	transfo ⓑ $\begin{vmatrix} P_0 \\ T_0/2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2P_0 \\ T_0 \end{vmatrix}$
ΔS	En utilisant la formule 8) $\Delta S = -\frac{nR\gamma}{\gamma-1}\ln 2$	En utilisant la formule 8) $\Delta S = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\ln 2 - nR\ln 2$
S_{ech}	$S_{ech} = \int \frac{\delta Q}{T_{source}} = \frac{Q}{T_0/2}$ $S_{ech} = -\frac{nR\gamma}{\gamma-1}$	$S_{ech} = \int \frac{\delta Q}{T_{source}} = \frac{Q}{T_0}$ $S_{ech} = \frac{nR}{2(\gamma-1)}$
$S_{créé}$	$S_{créé} = \Delta S - S_{ech}$ $S_{créé} = -\frac{nR\gamma}{\gamma-1}\ln 2 + \frac{nR\gamma}{\gamma-1}$	$S_{créé} = \Delta S - S_{ech}$ $S_{créé} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\ln 2 - nR\ln 2 - \frac{nR}{2(\gamma-1)}$

$$\boxed{S_{créé\,a} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}(1-\ln 2)}$$

$$\boxed{S_{créé\,b} = \frac{nR}{\gamma-1}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)}$$

$$\boxed{S_{créé\,total} = \frac{nR}{\gamma-1}\left(\gamma(1-\ln 2) + \ln 2 - \frac{1}{2}\right)}$$

---

10) Vérification

$$\eta = \eta_{rev} - \frac{T_{froid}\,S_{créé}}{Q_{chaud}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\frac{T_0}{2}\frac{nR}{\gamma-1}\left(\gamma - \gamma\ln 2 + \ln 2 - \frac{1}{2}\right)}{\frac{nR}{\gamma-1}\frac{T_0}{2} + nR\,T_0\ln 2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\gamma - \gamma\ln 2 + \ln 2 - \frac{1}{2}}{1 + 2(\gamma-1)\ln 2}$$

ce qui après simplification redonne bien la réponse de 4)
